Fibonaccizahlen

Die Fibonacci-Folge ist eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen, die mit den Folgegliedern $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ beginnt. Jedes weitere Folgeglied ergibt sich durch Addition seiner beiden Vorgänger. Es ist also

$$f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$$

und

$$f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3$$

Allgemein gilt für das n-te Folgeglied ab n = 3:

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$$

Die einzelnen Folgeglieder heißen Fibonaccizahlen. Das n-te Folgeglied f_n heißt auch die n-te Fibonaccizahl. Demnach ist die Zahl 3 die vierte Fibonaccizahl. Die Zahl 4 ist keine Fibonaccizahl.

Aufgaben

1 Geben Sie die Fibonaccizahlen f_5 bis f_7 an.

(1 BE)

2 In Material 1 sind die Struktogramme von zwei Algorithmen gegeben.

2.1 Berechnen Sie unter Verwendung der vorgegebenen Algorithmen die Funktionswerte fib1(5) und fib2(5).

(4 BE)

2.2 Analysieren Sie die asymptotischen Laufzeiten der beiden Algorithmen fib1(n) und fib2(n) in Abhängigkeit von n.

(4 BE)

3 Wie alle natürlichen Zahlen können auch Fibonaccizahlen in unärer Schreibweise angegeben werden. Die Sprache aller Fibonaccizahlen in unärer Schreibweise sei L_1. Die Grammatik G in Material 2 erzeugt L_1.

Hinweis
Für die unäre Schreibweise gilt:
$1_{dezimal} = \bullet_{unär}$ $2_{dezimal} = \bullet\bullet_{unär}$ $3_{dezimal} = \bullet\bullet\bullet_{unär}$ $4_{dezimal} = \bullet\bullet\bullet\bullet_{unär}$ usw.

3.1 Ordnen Sie die Grammatik G begründet in die Chomsky-Hierarchie ein.

(2 BE)

3.2 Geben Sie eine Ableitung für die Worte • • • und • • • • • an.

(3 BE)

3.3 Die Ableitung jeder Fibonaccizahl größer als 2 in unärer Darstellung mithilfe von G enthält Zwischenergebnisse, die nur aus Nichtterminalen bestehen, mit L beginnen und auf YR enden. Für die achte Fibonaccizahl $f_8 = 21$ lauten diese Zwischenergebnisse
S → LYR →…→ LABYR →…→ LABABAYR →…→ LABABAABAABYR →…
→ LABABAABAABABAABABAYR .

Beschreiben Sie, wie das Zwischenergebnis LABABAABAABYR in LABABAABAABABAABABAYR überführt wird, und geben Sie die dafür benötigten Produktionen an.

(3 BE)

4.1 Implementieren Sie ein kommentiertes Registermaschinenprogramm, das die n-te Fibonaccizahl f_n berechnet. Zu Beginn soll in Register R1 der Parameter n abgelegt sein. Die Registermaschine soll mit f_n im Akkumulator terminieren.

(7 BE)

4.2 Das Registermaschinenprogramm aus Aufgabe 4.1 kann man so anpassen, dass es für eine in R1 übergebene natürliche Zahl m entscheidet, ob es sich bei dieser um eine Fibonaccizahl handelt oder nicht. Beschreiben Sie die notwendigen Veränderungen am Programm aus Aufgabe 4.1.

(2 BE)

4.3 Begründen Sie auf Basis des Berechenbarkeitsmodells Registermaschine folgende Aussage:

Die Menge aller Fibonaccizahlen ist entscheidbar.

(2 BE)

4.4 Erläutern Sie ein Problem, das unentscheidbar ist.

(2 BE)

Material 1

Struktogramme der Algorithmen fib1(n) und fib2(n)

Algorithmus fib1(n)

```
fm = 1
fn = 1
temp = 0
wiederhole für i = 1 bis n - 2
    temp = fn
    fn = fn + fm
    fm = temp
return fn
```

Algorithmus fib2(n)

n<=2	
ja	nein
return 1	return fib2(n-1) + fib2(n-2)

Material 2

Grammatik G zur Sprache L_1

T = { • }

N = {S, L, R, A, B, X, Y}

Startsymbol = S

P = { S → • | • • | L Y R ,
B X → X A ,
A X → X A B ,
L X → L Y A B ,
Y A → A Y ,
Y B → B Y ,
Y R → X R | • • ,
A • → • • ,
B • → • • ,
L • → • • }

Hinweis
Die beiden Nichtterminalzeichen L und R markieren den Anfang und das Ende eines Zwischenergebnisses.